La logique de la découverte scientifique
En hommage à Karl Popper

François LEPAGE
Université de Montréal

0. Introduction

De nombreux philosophes des mathématiques, logiciens et informaticiens considèrent que la logique de la *preuve* est la logique intuitionniste : un énoncé A est vrai ssi nous avons une preuve (constructive au sens intuitionniste) de A. Il est légitime de se poser la question suivante : la logique intuitionniste peut-elle également être considérée comme la logique du raisonnement scientifique en général ? En reprenant une idée qui remonte à Popper, nous allons montrer que la logique intuitionniste est un excellent candidat comme logique de la découverte scientifique.

Le plan de la présente intervention est le suivant. Premièrement, nous présentons un système de logique intuitionniste avec négation forte de Nelson ainsi que la structure de modèle à la Kripke pour laquelle le système est fiable et complet. Nous montrons qu'une interprétation naturelle de la logique intuitionniste est celle d'une logique modale trivalente (le vrai, le faux et l'indéterminé). Deuxièmement, nous présenterons la notion d'interprétation probabiliste partielle inspirée des fonctions de probabilité conditionnelles à la Popper, et où les conditions ne sont pas des énoncés mais des ensembles d'énoncés (on écrit $\Pr(A,\Gamma)$). Nous définissons les notions de *validité probabiliste*. Nous montrons que les modèles de Kripke permettent justement de définir une interprétation en termes de probabilités conditionnelles partiellement définies pour laquelle le système est fiable et complet. Les deux principales caractéristiques de ces interprétations sont :

$\Pr(A \vee \neg A,\Gamma)$ est indéterminée ssi $\Pr(A,\Gamma)$ (et $\Pr(\neg A,\Gamma)$) sont indéterminées;

$\Pr(A \vee \neg A,\Gamma) = 1$ ssi $\Pr(A,\Gamma)$ est déterminées :

$\Pr(A \to B,\Gamma) = \Pr(B,\Gamma \cup \{A\})$ ssi cette dernière est déterminée.

Enfin, nous tirons quelques conclusions philosophiques.

1. Un système de logique intuitionniste avec une négation forte

Soit *PI* le système suivant basé sur les quatre connecteurs $\sim, \wedge, \vee$ et $\to$:

I1 $A \to (B \to A)$

I2 $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

I3 $A \wedge B \to A$

I4 $A \wedge B \to B$

I5 $A \to A \vee B$

I6 $B \to A \vee B$

I7 $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$

I8 $\mathrm{F} \to A$

PI1 $\sim\sim A \to A$

PI2 $A \to \sim\sim A$

PI3 $\sim (A \wedge B) \to \sim A \vee \sim B$

PI4 $\sim (A \vee B) \to \sim A \wedge \sim B$

PI5 $A \wedge \sim A \to \mathrm{F}$

PI6 $\sim(A \to B) \to (A \wedge \sim B)$
PI7 $(A \wedge \sim B) \to \sim(A \to B)$
PI8 $\sim\neg A \to A$
PI9 $A \to \sim\neg A$
PI20 $\sim A \to (A \to B)$
PI21 $A \to (B \to (A \wedge B))$
PI22 $\sim A \vee \sim B \to \sim(A \wedge B)$
PI23 $\sim A \wedge \sim B \to \sim(A \vee B)$
où $\neg A$ est $A \to \mathrm{F}$ et l'unique règle est MP, le modus ponens. La définition de $\Gamma \vdash A$ est standard.

Un ensemble consistant déductivement clos saturé (*ECDCS*) est un ensemble Γ de ebf qui est
(1) Saturé, c'est-à-dire que $A \vee B \in \Gamma$ ssi $A \in \Gamma$ ou $B \in \Gamma$
(2)Déductivement clos, c'est-à-dire que $A \in \Gamma$ ssi $\Gamma \vdash A$
(3) Consistant, c'est-à-dire qu'il y a un *A* tel que $\Gamma \nvdash A$

Soit *W* l'ensemble des *ECDCS*. $< W, \subseteq >$ est une structure kripkéenne de modèle. Soit $w \in W$. On définit une valuation V_w telle que
$V_w(p) = 1$ ssi $p \in w$ où *p* est un atome
$V_w(p) = 0$ ssi $\sim p \in w$ où *p* est un atome
$V_w(p) = i$ (pour indéterminé)
$V_w(\sim A)$, $V_w(A \wedge B)$ et $V_w(A \vee B)$ sont définis comme dans la logique forte de Kleene et

$$V_w(A \to B) = \begin{cases} 1 \text{ ssi } V_{w'}(B) = 1 \text{ pour tout } w' \text{ tel que } w \subseteq w' \text{ et } V_{w'}(A) = 1 \\ 0 \text{ ssi } V_w(A) = 1 \text{ et } V_w(B) = 0 \\ i \text{ autrement} \end{cases}$$

On montre que le système est fiable et complet pour cette sémantique.

2. Une interprétation probabiliste en termes de fonctions de probabilité conditionnelle partiellement définies

Une fonction de probabilité conditionnelle partielle est une fonction partielle $\Pr : L \times 2^L \to [0,1]$ satisfaisant les contraintes suivantes :

P.1 Si $A \in \Gamma$, alors $\Pr(A, \Gamma)$ est définie
P.2 Si $\Pr(A, \Gamma)$ est définie, alors $\Pr(\sim A, \Gamma)$ est définie;
P.3 Si $\Pr(\sim A, \Gamma)$ est définie, alors $\Pr(A, \Gamma)$ est définie;
P.4 Si $\Pr(A \wedge B, \Gamma)$ est définie, alors $\Pr(B \wedge A, \Gamma)$ est définie;
P.5 Si $\Pr(A, \Gamma)$) et $\Pr(B, \Gamma)$ sont indéfinies alors $\Pr(A \wedge B, \Gamma)$ est indéfinie,
P.6 Si $\Pr(A, \Gamma) = 0$, alors $\Pr(A \wedge B, \Gamma) = 0$;
P.7 Si $\Pr(A, \Gamma) = 1$, alors $\Pr(A \vee B, \Gamma) = 1$.
P.8 Si $\Pr(A, \Gamma)$) et $\Pr(B, \Gamma)$ sont indéfinies alors $\Pr(A \wedge B, \Gamma)$ est indéfinie,
P.9 Si $\Pr(A \wedge B, \Gamma)$ est définie, and $\Pr(A, \Gamma)$ est indéfinie, alors $\Pr(B, \Gamma) = 0$.

P.10 Si $\Pr(A \vee B,\Gamma)$ est définie, and $\Pr(A,\Gamma)$ est indéfinie, alors $\Pr(B,\Gamma)=1$.

et quand Pr est définie, les contraintes suivantes sont également respectées :

NP.1 $0 \leq \Pr(A,\Gamma) \leq 1$;
NP.2 Si $A \in \Gamma$, alors $\Pr(A,\Gamma)=1$ (et est définie pour tout Pr et Γ) ;
NP.3 $\Pr(A \vee B,\Gamma) = \Pr(A,\Gamma) + \Pr(B,\Gamma) - \Pr(B \wedge A,\Gamma)$;
NP.4 $\Pr(A \wedge B,\Gamma) = \Pr(A,\Gamma) \times \Pr(B,\Gamma \cup \{A\})$;
NP.5 $\Pr(\sim A,\Gamma) = 1 - \Pr(A,\Gamma)$ si Γ est Pr-normal (c'est-à-dire qu'il y a au moins un A tel que $\Pr(A,\Gamma) = 0$);
NP.6 $\Pr(A \wedge B,\Gamma) = \Pr(B \wedge A,\Gamma)$;
NP.7 $\Pr(C,\Gamma \cup \{A \wedge C\}) = \Pr(C, \cup \{A, C\})$;
NP.8 $\Pr(A \rightarrow B,\Gamma) = \Pr(B,\Gamma \cup \{A\})$

Définition de la notion de conséquence valide.
A est une conséquence valide d'un ensemble de d'énoncés Γ (on écrit $\Gamma \Vdash A$) ssi pour tout Pr, $\Pr(A,\Gamma \cup \Delta) = 1$ pour tout Δ.

Proposition PI est fiable pour les interprétations probabilistes, c'est-à-dire que si $\Gamma \vdash A$, alors $\Gamma \Vdash A$.

La preuve est longue et laborieuse. Il faut montrer que (1) tous les élément de Γ sont des conséquences sémantiques de Γ (ce qui est trivial); (2) que les axiomes de PI sont tous des conséquences sémantiques de Γ; (3) que MP transmet la validité. Voici un exemple de (2) : $\Gamma \Vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)$. En effet, par le théorème de la déduction (qui est valable dans PI), il suffit de montrer que $\Gamma \cup \{A, B\} \Vdash A$ c'est-à-dire que pour tout Γ et pour tout Δ, $\Pr(A,\Gamma \cup \{A, B\} \cup \Delta) = 1$ ce qui est vrai par NP.2.

Proposition PI est complet pour les interprétations probabilistes, c'est-à-dire que si $\Gamma \Vdash A$, alors $\Gamma \vdash A$.

La preuve est relativement facile. Supposons que $\Gamma \nvdash A$. On montre aisément que $\Gamma \cup \{\sim A\}$ est consistant. Il existe donc une *ECDCS* $w_{\Gamma \cup \{\sim A\}}$ contenant $\Gamma \cup \{\sim A\}$.
Pour tout ensemble de ebf Δ, soit $U(\Delta) = \{w \in ECDCS : \Delta \subseteq w\}$. On définit $\Pr_{<W,\subseteq>}$ telle que

$$\Pr_{<W,\subseteq>}(A,\Gamma) = \begin{cases} 1 \text{ ssi } A \in w \text{ pour tout } w \in U(\Gamma) \text{ tel que } \Gamma \subseteq w \\ 0 \text{ iff } \neg A \in w \text{ pour tout } w \in U(\Gamma) \text{ tel que } \Gamma \subseteq w \\ \text{indéterminée autrement} \end{cases}$$

On montre ensuite que $\Pr_{<W,\subseteq>}$ satisfait P.1-8 et NP.1-8.

Par ailleurs, on ne peut pas avoir $\Gamma \Vdash A$ car $\Pr_{<W,\subseteq>}(A,\Gamma) \neq 1$ parce que $\Gamma \subseteq w_{\Gamma \cup \{\sim A\}}$ et $V_{w_{\Gamma \cup \{\sim A\}}}(A) = 0$.

3. Conclusion

Je prétends que la logique intuitionniste interprétée à l'aide de fonctions de probabilité partiellement définies est la logique de la découverte scientifique de Popper pour les raisons suivantes.
La certitude est le propre de la logique et des mathématiques. Pour les connaissances empiriques, on demeure dans le domaine du plus ou moins probable. Les interprétations de la logique intuitionniste à l'aide des fonctions de probabilité partiellement définies sont ainsi une généralisation de l'interprétation usuelle. Cette généralisation s'applique également au statut du tiers exclu. Pour l'interprétation habituelle, pour avoir une preuve de $A \vee \neg A$, il faut que A soit prouvé ou discarté. Pour les interprétations probabilistes partiellement définies, on a une propriété similaire : si $\Pr(A,\Gamma)$ est indéterminée, $\Pr(A \vee \neg A,\Gamma)$ est également indéterminée. Mais si $\Pr(A,\Gamma)$ a une valeur, $\Pr(A \vee \neg A,\Gamma)$ en a une également et cette valeur est 1.
Une autre propriété liée à l'absence de certitude est la suivante. Supposons que A soit un énoncé qui exprime une loi générale et que Γ ne contient que des énoncés empiriques singuliers. Nous n'aurons pas $\Pr(A,\Gamma)=1$ (à moins que Γ n'épuise l'ensemble de tous les faits singuliers) mais nous pourrions très bien avoir $\Pr(A,\Gamma)=0$: il suffit que Γ contienne un énoncé singulier qui contredise A.
Un troisième argument plaide en faveur des interprétations probabilistes partiellement définies. On sait depuis longtemps qu'il n'y a pas de connecteur vérifonctionnel « > » tel que $\Pr(A > B,\Gamma)=\Pr(B,\Gamma \cup \{A\})$. On sait également que les contrefactuels ne peuvent pas avoir cette propriété. Pourtant, il y a une intuition (de Ramsey à Stalnaker et au-delà) qui veut que la probabilité d'un conditionnel soit la probabilité du conséquent après avoir ajouté hypothétiquement l'antécédent à l'ensemble des croyances d'arrière-plan. Quel est donc ce conditionnel mystérieux ? C'est le conditionnel de la logique intuitionniste à la condition de l'interpréter par des fonctions de probabilité partiellement définies parce que l'on doit rejeter le tiers exclu.
Enfin un dernier argument. On sait que si l'on ne prend que des ensembles maximalement consistants au lieu de *ECDCS*, on trivialise la structure de modèle de Kripke : la logique intuitionniste devient la logigue classique, c'est-à-dire que « $\rightarrow$ » devient « $\supset$ ». On vérifie facilement que, dans le cas où Γ est maximalement consistant, Pr est une fonction totale qui ne prend que les valeurs 1 et 0 et que pour tout A et B, $\Pr(A \rightarrow B,\Gamma)=\Pr(A \supset B,\Gamma)$ et que ces valeurs sont celles de la table de vérité de $A \supset B$ où les valeurs de vérité de A et B sont déterminées par leur appartenance ou non à Γ.