Logique, calcul et représentation en contexte catégorique : *le point de vue des monades*

Sylvain CABANACQ
Laboratoire SPHERE
UMR 7219 CNRS - Université Paris Diderot

La distinction syntaxe/sémantique, ou plus exactement l'articulation du plan des formules et des preuves et celui des entités mathématiques, constitue le cœur de l'approche model-théorique des objets mathématiques. Il est possible, cependant, de considérer qu'une telle séparation demeure interne au champ des mathématiques, dans la mesure où les théories y prennent la forme de systèmes symboliques de nature combinatoire. La théorie des modèles peut alors être vue comme un lieu d'articulation de différents domaines d'objets, et par-là même rapprochée d'autres disciplines mathématiques. Albert Lautman note en ce sens, dans *L'essai sur les notions de structure et d'existence en mathématiques*, que concernant "les problèmes du passage de l'essence à l'existence [...] il ne semble pas que la logique jouisse d'un privilège spécial ; [...] les genèses qui s'y manifestent sont comparables à celles que nous observons ailleurs". D'autres parties des mathématiques paraissent ainsi illustrer cette "genèse des genres de l'être les uns à partir des autres", comme la topologie algébrique, l'algèbre homologique, ou la logique catégorique, usant de concepts tels que les complexes simpliciaux, les esquisses ou les topos classifiants. Se révèlent ainsi différentes modalités de la représentation, au sens intra-mathématique d'une mise en relation asymétrique d'objets abstraits (l'objet représentant permettant de manipuler l'objet représenté et de déterminer certaines de ses propriétés), dont il devient possible de mettre en lumière, par comparaison, les spécificités. Quel pourrait être, dans cette perspective, l'apport propre des concepts sémantiques (tels que la réalisation ou la définissabilité) au champ mathématique ? Pourrait-on évaluer le degré d'adéquation d'un mode de représentation pour un domaine donné d'objets mathématiques ?

Parmi les concepts catégoriques qui font pendant à l'approche logique des mathématiques, les monades (ou triples) constituent un point de vue privilégié pour envisager cette diversité des modes de représentation. En effet, définies en 1958 par Roger Godement sous la forme de "constructions standard", les monades (constituées d'un endofoncteur dans une catégorie de base et de deux transformations naturelles) se présentent d'abord comme des outils abstraits permettant de construire des résolutions cohomologiques. Ces procédures, visant à étendre à des domaines algébriques des méthodes issues de la topologie algébrique, ont ensuite été généralisées au calcul des groupes d'homotopie

(Huber, 1961) et d'homologie (Beck, 1967). Cependant, dans le même temps, dans le sillage des travaux de Lawvere sur la sémantique fonctorielle et la mise en place du programme de la logique catégorique, les monades ont été rapprochées des notions de théories algébriques (Linton, 1966) et d'adjonction (Eilenberg-Moore, 1965), et par là même des questions posées par l'algèbre universelle de Birkhoff. Que nous enseigne, dès lors, ce rapprochement, via la notion de monade, de procédures élaborées pour des entités de nature topologique et de problématiques algébriques ? Plus largement, que nous apprend l'algèbre (co)homologique ou homotopique des objets mathématiques qui s'y trouvent examinés ? Ainsi par exemple, dans le cas des groupes, qu'est-ce qui sépare la monade de la théorie ?

La notion de monade apparaît d'autant plus centrale, dans ce cadre, que Quillen a pu montrer en 1967 que pour les objets mathématiques pour lesquels il est possible de construire une monade sur la catégorie des ensembles, la cohomologie définie à partir de cette monade coïncide avec celle qu'il définit dans le cadre homotopique général des catégories modèles, ainsi qu'avec celle que l'on obtient par la biais d'une cohomologie de faisceaux, pour une certaine topologie de Grothendieck sur la catégorie des objets en question. Les monades apparaissent ainsi comme un point d'unification de cette approche des objets mathématiques héritée de la topologie algébrique, dès lors que l'on considère les catégories "monadiques sur les ensembles". Mais comment comprendre cette restriction ? Se manifeste en réalité ici une première différence entre la caractérisation logique des objets mathématiques et la construction de leurs monades : alors que la plus grande partie des concepts mathématiques peuvent être vus comme les modèles d'une théorie du premier ordre, la propriété d'être représentable par une monade sur une catégorie donnée n'est pas nécessairement satisfaite, et dépend par ailleurs de la catégorie de base retenue. On peut noter par exemple qu'alors que la catégorie des espaces topologiques n'est pas monadique sur les ensembles, cette propriété est satisfaite par les algèbres compacts. Que révèle donc cette propriété ? Certains mathématiciens (Eckmann, Manes) y ont vu une "mesure d'algébricité", interprétation qui rend cependant problématiques la non-monadicité des corps, ainsi que le rôle de la catégorie de base dans une telle caractérisation. Afin d'éclairer ces deux points, il semble possible d'une part de dégager les relations qu'entretiennent les monades avec les autres concepts de la logique catégorique (tout particulièrement les esquisses et les catégories localement présentables), et d'autre part d'examiner les éventuelles "traductions" model-théoriques de la monadicité.

L'étude mathématique des langages de programmation amène cependant à considérer selon une perspective nouvelle les spécificités de la représentation monadique. A la suite des travaux d'Eugenio Moggi sur les "notions de computation", les monades permettent en effet d'introduire dans la représentation catégorique des processus de calcul les propriétés de ces processus, telles que le non-déterminisme, les continuations ou les effets de bords, et ainsi de déterminer, pour une plus large classe de programmes, leur éventuelle équivalence. Apparaît ainsi au premier plan une notion demeurée jusqu'ici implicite : le calcul. Ce qui pose cependant la question de savoir ce qu'ont en commun le calcul des informaticiens et celui, par exemple, du n-ième groupe de cohomologie pour un objet donné.

L'histoire de la notion de monade, sa circulation à travers différents domaines, mais aussi son caractère central dans le contexte des "genèses" homologiques, permet donc d'esquisser un réseau de concepts et de problèmes, et de dégager ainsi les spécificités d'un tel mode de représentation, afin de mettre en lumière, par contraste et de l'intérieur du champ mathématique, la singularité de l'approche model-théorique des objets mathématiques et les présupposés éventuels de l'usage mathématique des concepts sémantiques.