

Titre :

La "pratique collective" comme fondement épistémique d'une nouvelle pratique individuelle – un cas d'espèce : la Toile des mathématiciens.

RÉSUMÉ LONG

La piste de recherche n° 2 indiquée dans l'appel à contribution suggère d'examiner « *l'influence de valeurs non épistémiques sur le contenu même des sciences* » dans le cadre des pratiques scientifiques. Dans ce cadre, je souhaiterais exposer une lecture particulière de cette piste, que je résumerais ainsi :

Proposition

1°- *Interpréter l'énoncé « influence de valeurs non épistémiques sur le contenu même des sciences » d'un point de vue épistémique, i.e. : montrer en quoi la notion de "pratique collective" appréhendée par l'agent-scientifique comme une valeur externe à sa pratique lui permet de justifier la légitimité d'un pratique interne à sa science, en particulier quand cette pratique n'est pas adossée à une définition formelle dans le langage-objet de sa science.*

2°- *Montrer que cette interprétation nous fournit des clés pour caractériser certains phénomènes techno-culturels actuels.*

Plus concrètement, nous voudrions :

1°- aborder le domaine des pratiques mathématiques, en particulier un épisode de son histoire où l'appel à la notion (idéale) de "pratique collective" a permis à un mathématicien de "définir" (dans un sens que nous précisons) un nouvel élément du langage-objet de sa discipline ;

2°- Nous servir de cet épisode pour éclairer de manière nouvelle le phénomène de mise en réseau des pratiques culturelles et sociales *via* la Toile (Web).

Du point de vue historique, l'épisode en question se situe au début du processus de transformation de la notion vague – et non mathématique – d'*effectivité* (et/ou de *procédure effective*), apparue à la fin du XIXe siècle, en un concept mathématique bien défini – *récurtivité générale*, calculabilité par une Machine de Turing universelle, etc. Il s'agit plus précisément des premières tentatives d'Emile Borel, entre les années 1898 et 1900, pour définir la notion opérationnelle d'effectivité (et de procédure effective) qui lui permettrait d'extraire des pratiques mathématiques de l'époque un noyau "authentique" – par opposition à la pratique réputée "logiciste" i.e. maniant logiquement des contenus mathématiques sans nécessairement avoir le "contrôle" sur le contenu résultant... Cette controverse entre deux épistémologies, protéiforme, amplement connue par son versant hilbertien, a été éteinte par la thèse de Turing-Church(-Kleene).

Point 1° de notre proposition

Nous nous focaliserons sur les années 1898-1900 (donc en amont de du déclenchement « officiel » de la Crise des fondements), époque où l'effectivité apparaît encore comme un jugement non mathématique (*valeur non épistémique*) portant sur la pratique mathématique. Borel, pour éviter le piège subjectiviste, adosse cette notion sur l'idée de "pratique collective". Par exemple, si en 1898¹ il considère qu'une procédure de démonstration est effective si elle est « complètement exprimable *au moyen d'un nombre fini de mots, parmi lesquels peut figurer le mot indéfiniment [...]* », il précise en 1900² que ce principe est

¹ **Borel**, *Leçons sur la théorie des fonctions*, Gauthier-Villars, 1898, Note II, p.122.

² **Borel**, *L'antinomie du transfini*, 1900, in *Œuvres complètes* (p.2121-2127), p.2124. Le gras est de nous.

contraint par l'idée d'une communication non ambiguë et sans erreur entre mathématiciens. En effet, il écrit, au sujet de l'infini dénombrable (réalisé) qu'il considère à l'époque comme un concept mathématique authentique : « *la notion de l'indéfini, ou infini dénombrable [réalisé], est, pour les mathématiciens, une notion **parfaitement claire ne donnant lieu, lorsqu'ils parlent entre eux, à aucune ambiguïté** [...]. [Au contraire] tous ceux dont l'instruction mathématique est assez avancée pour qu'ils comprennent ce théorème [³], aussi clairement que chacun comprend qu'après chaque entier il y en a un autre, n'ont pas en commun une notion du transfini, aussi claire que la notion qu'ils ont de l'indéfini, c'est-à-dire telle **qu'ils puissent se comprendre entre eux, lorsqu'ils en parlent, sans aucune chance d'erreur.** » Borel écarte ainsi le risque subjectiviste du jugement d'effectivité de la pratique individuelle en certifiant son objectivité par référence à une « pratique collective » idéalisée.*

Bien que mise en défaut plus tard (en 1905 par paradoxe de Richard⁴), cette tentative précoce d'objectivation par appel au collectif est le premier pas vers ce que Borel réalisera en 1908⁵ : exprimer *mathématiquement* la notion d'effectivité, via le concept d'*ensemble effectivement énumérable* (infini réalisé).

Point 2° de notre proposition

L'idée de Borel de fonder un nouveau concept mathématique sur la notion non épistémique quoique idéalisée de "communauté de pratiques mathématiques" nous incite à aborder le concept mathématique de Machine de Turing lui-même sous un angle différent de celui proposé par Turing (i.e. celui de "calculateur humain"⁶), en nous demandant si la

³ Il s'agit du théorème de Du Bois-Reymond sur la croissance des fonctions : étant donnée une suite dénombrable quelconque de fonctions croissantes, il existe une fonction croissante plus grande que chacune d'elles. Borel se questionne sur la possibilité que ce théorème constitue un principe d'induction transfini.

⁴ **Richard**, *Les principes des mathématiques et le problème des ensembles*, in *Revue générale des sciences*, 30 juin 1905

⁵ **Borel**, *Les "paradoxes" de la théorie des ensembles*, 1908, in *Œuvres complètes*, p.1271-1276.

⁶ **Turing**, *On Computable Numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*, in *Proceedings of the Mathematical Society*, 2, vol.42 (1936-1937), pp.230-265

Machine de Turing ne pourrait être vu comme une représentation objectivée de la pratique collective des mathématiciens, sorte de "plus petit commun multiple" de toutes les pratiques mathématiques.

Sachant que la Turing-calculabilité est au fondement de la science informatique laquelle fonde à son tour les Nouvelles technologies de l'information et de la communication, nous nous demanderons si cette interprétation "collectivisante" de la Machine de Turing ne dessine pas une grille d'analyse alternative : ne pourrions-nous pas penser le phénomène des NTIC comme l'expression-extension technique d'un réseau idéalisé (par les mathématiciens eux-mêmes) de mathématiciens pratiquant leur discipline ? Dans ce cas, que permet de dire cette métaphore sur l'évolution de la "culture/société numérique" ?

Par exemple, en remarquant que le "Web"⁽⁷⁾ est d'une part une machine de Turing, d'autre part un nouvel espace de pratiques collectives – le plus étendu et connexe de tous - , cela signifie-t-il que les pratiques collectives culturelles et sociales qui siègent dans cet espace sont contraintes par les limites inhérentes à l'épistémologie de l'informatique, et de ce fait externes à ces pratiques ?

⁷ Entendons : cet objet/phénomène incluant le comportement des réseaux techniques reliant les machines numériques **et** les actions des agents-opérateurs sur ces machines.