Lakatos et l'interprétation sans contre-exemple

Jean Fichot (Paris 1-IHPST)

15 février 2012

Lakatos a proposé dans [6] d'étendre la conception faillibiliste des sciences de la nature aux mathématiques. Selon lui, une conjecture est proposée qui s'appuie sur une « démonstration » informelle. Cette dernière est une « expérience de pensée » qui mène à distinguer dans la conjecture des sous-conjectures, des lemmes. Ensuite des contre-exemples sont découverts qui réfutent soit la conjecture elle-même (contre-exemples globaux), soit un des lemmes (contre-exempes locaux). Un contre-exemple global est toujours un contre-exemple local, mais parfois d'un lemme implicite qui, pour être formulé et rajouté à la conjecture, demande l'invention d'un concept. La conjecture ainsi modifiée remplace celle considérée à l'origine et le processus dialectique de la démonstration et des réfutations peut (éventuellement) reprendre.

Feferman dans [1] relève un point intéressant, mais sans l'exploiter : la forme logique de la conjecture envisagée par Lakatos dans son exposé est particulièrement simple et il donne quelques exemples de théorèmes qui ne se prêtent guère à une analyse analogue. Il est intéressant de poursuivre dans cette voie et de se demander ce que pourrait être une réfutation d'une conjecture plus complexe qui ne ne saurait prendre la forme de la seule donnée d'un contre-exemple global. On se propose de montrer qu'alors la dialectique ne vaut plus entre deux termes différents, les « démonstrations informelles » et les conjectures d'une part, les contre-exemples locaux ou globaux d'autre part, mais bien entre des conjectures et des « démonstrations informelles », apparemment incompatibles. Mais si cette tension peut se manifester, c'est parce qu'un acord minimal règne sur l'idée même de démonstration : des deux arguments en présence l'un ou l'autre (ou peut-être les deux) se révèlera ne pas être une démonstration. Ainsi la conception « euclidienne » de la démonstration est présupposée dans [6]. Quelques passages indiquent d'ailleurs ce qui, selon Lakatos, peut mettre un terme au processus dialectique des preuves et des réfutations : une formulation ultime de la conjecture qui en fasse un énoncé « logiquement valide » et pas seulement « mathématiquement vrai ». Et il est facile de deviner quelle forme prend alors, au moins à titre idéal, sa démonstration : celle d'une preuve formelle. Les traducteurs dans [7] prolongent alors le dialogue avec les éditeurs de [6] en paraphrasant Dieudonné : « A quoi bon tout cela ! Tout ce qu'ont fait les logiciens depuis 1925 disparaîtrait demain que l'on ne s'en apercevrait même pas, tous ces gens sont devenus des marginaux » en invitant les contemporains à poursuivre le débat. C'est ce que l'on se propose de faire.

On doit à des logiciens des résultats, antérieurs à [6], que l'on ne peut négliger et qui portent sur les mécanismes qui font d'une preuve (ou démonstration « euclidienne ») un instrument permettant d'écarter effectivement les contre-exemples. Il s'agit d'une méthode, introduite indépendamment par G. Kreisel [4, 5] et K. Gödel [2, 3], dite de l'interprétation sans contre-exemple (NCI), et qui permet d'extraire d'une preuve *prima facie* non-contructive un algorithme qui, en quelque sorte, réfute les réfutations alléguées. Les voies suivies par ces deux auteurs diffèrent sur un point essentiel.

- Celle de Gödel est de traduire les énoncés de l'arithmétique de Heyting dans ceux d'une autre théorie, ces derniers se caractérisant par le fait qu'ils sont sous forme prénexe. Il est alors impossible de prouver constructivement l'équivalence entre un énoncé et sa traduction et tout le problème alors est de justifier les étapes élémentaires de traduction : c'est à ce moment que l'idée de NCI intervient localement. Elle se retrouve ensuite globalement *via* une traduction des preuves de l'arithmétique de Peano dans celles de l'arithmétique de Heyting.
- La voie suivie par Kreisel est de donner directement la NCI pour les preuves de l'arithmétique de Peano où, pour chaque énoncé, l'existence d'une forme prénexe équivalente n'est pas problématique.

Un des enjeux actuels de la *proof-theoretic semantics* est d'étendre à la logique et aux mathématiques classiques l'interprétation proposée par Brouwer, Heyting et Kolmogorov. Dans cette perspective, l'intérêt de la NCI est de fournir une réponse globale ; son principal inconvénient est qu'elle vaut essentiellement pour des énoncés sous forme prénexe et qu'elle ne permet que malaisément de donnner un analogue de l'interprétation BHK pour chacun des connecteurs. L'extension de la correspondance de Curry-Howard aux mathématiques classiques apporte sur ce point certains compléments attendus.

Références

[1] Solomon Feferman. The Logic of Mathematical Discovery versus The Logical Structure of Mathematics, in *In The Light of Logic*, Oxford University Press, 1998, 77-93.

[2] Kurt Gödel. Über eine bisher noch nicht benutzte Erweiterung des finiten Standpunkt. *Dialectica* 12, 280-287, 1958.

[3] Kurt Gödel. On an extension of finitary mathematics wich has not yet been used, 1972. Revised and extended version of [2] in K. Gödel *Collected works, II* (Eds. S. Feferman *et al.*), Oxford University Press 1990.

[4] Kreisel Georg. On the interpretation of non-finitist proofs, Part I. *Journal of Symbolic Logic* vol. 16 num. 4, 1951, 241-267.

[5] Kreisel Georg. On the interpretation of non-finitist proofs, Part II. *Journal of Symbolic Logic* vol. 17 num. 1, 1952, 43-58.

[6] Imre Lakatos. *Proofs and Refutations, The Logic of Mathematical Discovery* (Ed. J. Worral, E. Zahar), Cambridge University Press, (1976) 1999.

[7] Imre Lakatos. *Preuves et réfutations, Essai sur la logique de de la découverte mathématique,* (Trad. N. Balacheff, J.-M. Leblond), Hermann, 1984.